МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Е. С. Половинкин

Учебно-методическое пособие

ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ

МОСКВА 2006

Курс является обязательным, читается в 7 семестре. По итогам курса выставляется экзамен. Количество лекционных часов: 34.

Курс «Выпуклый анализ» является фундаментальным курсом, посвящённым изучению общих свойств выпуклых множеств и выпуклых функций в банаховых пространствах, что позволяет исследовать решения различных задач отыскания минимумов выпуклых функций, определённых на выпуклых множествах. К данному классу задач относятся задачи линейного программирования, задачи выпуклого программирования, задачи вариационного исчисления и задачи математической теории оптимального управления.

Оглавление

Предисловие

Основные цели курса

Дать студентам знания и навыки в теории негладких выпуклых множеств, теории двойственности выпуклых функций, теории субдифференциального исчисления выпуклых и слабо выпуклых функций, овладение методом Лагранжа и его обоснование для решения выпуклых экстремальных задач.

Место курса в системе профессиональной подготовки студента

Курс «Выпуклый анализ» вырабатывает у студента навыки владения аппаратом выпуклого анализа, субдифференциального исчисления и метода Лагранжа, что позволяет осуществить общий подход к решению любой прикладной экстремальной задачи, формализованной в математическом виде. Для освоения данного курса необходимо владение университетскими математическими курсами, в том числе курсом «Функционального анализа». Этот курс в свою очередь обеспечивает теоретическую подготовку для таких курсов, как «Методы оптимизации», в котором проводится детализация конкретных методов решения экстремальных задач.

Методы проведения занятий

Лекции: 32 часа

Формы контроля

Итоговый контроль:

1) письменный экзамен, включающий решения задач, которые оцениваются в баллах; продолжительность — 2 академических часа.

2) Устный экзамен по билетам. Итоговая оценка выставляется следующим образом. По итогам письменного экзамена устанавливается верхнее значение итоговой оценки: набрано более 60% от максимальной суммы баллов — верхнее значение «5»; от 40% до 60% — верхнее значение «4»; от 20% до 40% — верхнее значение «3», менее 20% — сразу выставляется итоговая оценка «2» без устного опроса. На устном экзамене по результатам ответа по билету выставляется итоговая оценка, которая не может превышать верхнее значение оценки, установленное по результатам письменного экзамена.

Программа курса

1. Выпуклые множества в банаховом пространстве. Выпуклая оболочка множества, выпуклые комбинации точек этого множества, их связь. Теорема Каратеодори о выпуклой оболочке множеств в R^n.

2. Метрика Хаусдорфа для множеств, ее свойства. Теорема о полноте метрического (с хаусдорфовой метрикой) пространства компактов из банахова пространства.

3. Операции Минковского с множествами: сумма, разность, умножение на скаляр. Свойства этих операций, в том числе справедливость неравенств:

$$h\,(A+B,C+D) \leqslant h\,(A,C) + h\,(B,D)\,,$$
$$h\,(\alpha A,\alpha B) \leqslant |\alpha| h\,(A,B)\,, \quad h\,(\alpha A,\beta A) \leqslant |\alpha-\beta| \cdot \|A\|,$$

где A,B,C,D — ограниченные множества из банахова пространства.

4. Понятия конуса и выпуклой конической оболочки. Понятия нижнего и верхнего касательных конусов к множеству в точке, их свойства.

5. Касательный конус Кларка, его выпуклость. Верхний и нижний асимптотические касательные конусы, их выпуклость и связь с другими касательными конусами.

6. Понятия эффективного множества и надграфика функции. Собственные полунепрерывные снизу функции, их связь с замкнутостью надграфика и лебеговых множеств уровня. Понятие замыкания функции. Теорема Вейерштрасса о достижении своего минимального значения собственной полунепрерывной снизу функцией на компакте из банахова пространства.

7. Выпуклые функции. Неравенство Иенсена. Функция Минковского и опорная функция множества. Их свойства. Выпуклая оболочка функции, ее свойства. Опорная функция суммы и разности (по Минковскому) выпуклых множеств. Формула хаусдорфова расстояния между ограниченными множествами через их опорные функции.

8. Непрерывность выпуклой функции, ограниченной на некотором открытом множестве.

9. Отделимость (простая, сильная, строгая) выпуклых множеств в гильбертовом пространстве. Существование и единственность проекции на выпуклое замкнутое множество. Теорема о строгой отделимости точки и выпуклого замкнутого множества. Теорема о сильной отделимости компакта от выпуклого замкнутого множества. Опорная гиперплоскость, ее существование в любой граничной точке выпуклого множества в R^n.

10. Теорема об отделимости выпуклых множеств из банахова пространства. О совпадении замыканий выпуклых множеств в сильной и слабой топологиях.

11. Преобразование Лежандра–Юнга–Фенхеля функции (сопряженные функции). Теорема о представлении выпуклой полунепрерывной снизу функции как поточечного супремума аффинных функций. Теорема Фенхеля–Моро о второй сопряженной функции.

12. Инфимальная конволюция функций. Теорема о двойственности инфимальной конволюции и суммы функций при преобразовании Лежандра–Юнга–Фенхеля.

13. Представление выпуклых множеств через пересечение полупространств. Связь собственных выпуклых положительно однородных полунепрерывных снизу функций с опорными функциями множеств.

14. Производная по направлениям выпуклой функции, ее представление через инфинум. Непрерывность производной по направлениям, вычисляемой в точке непрерыности исходной выпуклой функции. Связь производной по направлениям с касательным конусом надграфика.

15. Субдифференциал выпуклой функции. Связь условия непустоты субдифференциала функции с условием полунепрерывности снизу в нуле производной по направлениям. Теорема Дубовицкого–Милютина о субдифференциале максимума двух выпуклых функций.

16. Теорема Моро–Рокафеллара о субдифференциале суммы функций. Лемма о нормальном конусе пересечения выпуклых множеств.

17. Поляра множества и ее свойства. Касательный и нормальный конусы множества, заданного системой неравенств из выпуклых функций.

18. Задача выпуклого программирования. Метод множителей Лагранжа в задаче выпуклого программирования.

19. Локально выпуклые функции. Слабо и сильно выпуклые функции, r-выпуклые функции. Задача r-выпуклого программирования. Необходимые условия экстремума.

Литература

1. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М., Мир, 1973.

2. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач, М., Наука, 1974.

3. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М., Наука, 1980.

4. Половинкин Е.С., Балашов М.В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М., Физматлит, 2004.

Краткое содержание

Тема 1. Выпуклые множества

Учебная задача. Дать представление о выпуклых множествах, привести примеры, основные свойства. Дать представление о квазилинейных операциях Минковского с выпуклыми множествами: алгебраической сумме и геометрической разности.

Обзор темы. Напомнить определения гильбертова и банахова пространства. Дать прямое определение (через отрезок) выпуклого множества в банаховом пространстве. Привести типичные примеры выпуклых множеств: шар, гиперплоскость, полупространство, аффинное множество, симплекс. Дать определение строго выпуклого множества.

Дать определение алгебраической суммы Минковского и геометрической разности Минковского множеств, рассмотреть примеры суммы и разности шаров и кубов. Показать на примерах, что геометрическая разность не является в общем случае обратной операцией к алгебраической сумме множеств. Описать свойства суммы и разности. Доказать, что если из множества A вычесть множество B, то в итоге получится множество, содержащееся (быть может строго) во множестве A. Показать, что операции суммы $(+)$ и разности $(\overset{*}{-})$ не коммутативны: если из множества A вычесть множество C, а затем прибавить множество B, то получим множество (быть может пустое), содержащееся (быть может строго) во множестве, получаемом после того, как из суммы множеств A и B вычли множество C.

Показать, что сумма $(+)$ и разность $(\overset{*}{-})$ выпуклых множеств суть множества выпуклые.

Определить понятия выпуклой комбинации точек, аффинной комбинации точек, линейной комбинации точек.

Доказать критерий выпуклости множества, состоящий в том, что множество A выпукло тогда и только тогда, когда любая выпуклая комбинация точек из A содержится во множестве A.

Дать определение выпуклой оболочки (невыпуклого) множества A как пересечение всех выпуклых множеств, содержащих данное множество A.

Доказать теорему о том, что в банаховом пространстве выпуклая оболочка множества A состоит из тех и только тех точек, которые являются выпуклой комбинацией конечного числа точек из A.

Для конечномерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ размерности n доказать теорему Каратеодори о том, что выпуклая оболочка множества A из указанного пространства состоит из выпуклых комбинаций не более чем $(n+1)$ точек из A.

Контрольные задачи

1. Доказать, что геометрическую разность Минковского множеств A и B можно представить в виде $A \overset{*}{-} B = \bigcap_{b \in B}(A - b)$.

2. Пусть A, B — выпуклые множества, $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. Доказать, что $\lambda A + \mu B$ — выпуклое множество. Доказать, что при $\lambda > 0$, $\mu > 0$ справедливо равенство $\lambda A + \mu A = (\lambda + \mu)A$.

3. Привести пример невыпуклого множества A, для которого $A + A \neq 2A$.

4. Привести пример выпуклого множества A и чисел $\lambda > 0$, $\mu < 0$, для которых $\lambda A + \mu A \neq (\lambda + \mu)A$.

5. Доказать, что если A, B — компакты из банахова пространства, то $A + B$ — тоже компакт.

6. Доказать, что если A — компакт, а B — замкнутое множество из банахова пространства, то $A + B$ — замкнутое множество.

7. Привести пример выпуклых замкнутых множеств A, B таких, что $A + B$ является незамкнутым множеством.

8. Пусть $\operatorname{co} A$ обозначает выпуклую оболочку множества A. Доказать, что $\operatorname{co}(A + B) = \operatorname{co} A + \operatorname{co} B$.

9. Доказать, что если A — открыто, то $\operatorname{co} A$ — тоже открытое множество.

10. Доказать, что если A — конечное множество точек из банахова пространства, то $\operatorname{co} A$ есть компакт.

11. Доказать, что если A — компакт из $\mathbb{R}^n$, то $\operatorname{co} A$ — также компакт. (*Указание:* использовать теорему Каратеодори).

12. Доказать, что если A, B — компакты из E, то $\operatorname{co}(A \cup B)$ — также компакт в E.

13. Доказать, что если A, B — слабо* компактные выпуклые множества из E^*, то $\operatorname{co}(A \cup B)$ — также слабо* компактное множество.

Тема 2. Метрика Хаусдорфа

Учебная задача. Дать представление о возможности метризуемости совокупности выпуклых замкнутых множеств, с целью оценки близости между такими множествами, определения сходимости последовательности множеств, построения оценок аппроксимации одних множеств другими.

Обзор темы. Дать определение расстояния между множествами по Хаусдорфу $h(A,B)$. Дать разные формы задания метрики Хаусдорфа (через окрестности множеств, через расстояния от точки до множества), показать их эквивалентность, показать что задаваемые формулы метрики Хаусдорфа удовлетворяют аксиомам расстояния.

Разобрать примеры вычисления расстояния между множествами на плоскости.

Доказать лемму об эквивалентном выражении расстояния по Хаусдорфу между множествами через расстояния между точками этих множеств.

Доказать, что множество компактов из банахова пространства с метрикой Хаусдорфа образуют полное метрическое пространство.

Без доказательства обсудить теорему выбора Бляшке (о том, что семейство всех подмножеств заданного компакта образует компактное метрическое подпространство в метрике Хаусдорфа).

Доказать, что множество выпуклых замкнутых множеств замкнуто в метрике Хаусдорфа. Обсудить следствие этого, заключающееся в том, что множество всех выпуклых компактов образует полное метрическое подпространство с метрикой Хаусдорфа, а совокупность всех выпуклых компактных подмножеств заданного выпуклого компакта является компактным метрическим пространством в метрике Хаусдорфа.

Контрольные задачи

1. Пусть $l_\varphi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \cos\varphi \cdot x + \sin\varphi \cdot y = 0\}$ — семейство прямых, $\varphi \in [0,2\pi]$.

Доказать, что многозначная функция

$$F(\varphi) = l_\varphi \cap B_1(0), \text{ где } B_1(0) = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

— есть непрерывная функция на $[0,2\pi]$ со значениями из множества компактов в $\mathbb{R}^2$ в метрике Хаусдорфа.

2. Пусть $p(x,A) = \inf\{\|x - a\| \mid a \in A\}$ и пусть

$$\widetilde{h}(A,B) = \sup\{p(x,B) \mid x \in A\} + \sup\{\rho(y,A) \mid y \in B\}.$$

Доказать, что функция $\widetilde{h}(\cdot,\cdot)$ удовлетворяет аксиомам метрики, и метрика $\widetilde{h}(\cdot,\cdot)$ топологически эквивалентна метрике Хаусдорфа $h(\cdot,\cdot)$ (т.е. сходимость в одной метрике влечёт сходимость в другой).

3. Доказать неравенство

$$|\rho(x,A) - \rho(x,B)| \leqslant h(A,B),$$

где A, B — ограниченные замкнутые множества, $x \in E$.

4. Доказать неравенства ($A,B,C,D \subset E$; $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$):

$$h(A + B, C + D) \leqslant h(A,C) + h(B,D);$$
$$h(\alpha A, \alpha B) \leqslant |\alpha| h(A,B);$$
$$h(\alpha A, \beta A) \leqslant |\alpha - \beta| h(A,\{0\}).$$

Тема 3. Касательные конусы

Учебная задача. Дать представление о касательных конусах для заданного множества в его граничной точке как о естественном обобщении касательного подпространства в гладком случае. Показать различные подходы к определению касательных векторов и конусов. Описать их свойства.

Обзор темы. Дать определение понятия конуса. Определить понятие выпуклой конической оболочки данного множества и доказать формулу её вычисления.

Дать определение касательного вектора ко множеству в данной точке. Определить нижний касательный конус ко множеству в точке как совокупность всех касательных векторов к этому множеству в этой точке.

Определить верхний касательный конус (иначе называют: контингентный конус или конус Булигана) и дать формулу для его вычисления.

Определить касательный конус Кларка ко множеству в точке, доказать теорему о том, что касательный конус Кларка для любого множества есть выпуклый конус.

Привести примеры, демонстрирующие различия приведённых выше касательных конусов, их достоинства (размеры) и недостатки (возможная невыпуклость).

Привести алгоритм выделения в любом (невыпуклом) конусе его выпуклого подконуса.

Определить асимптотический конус (по Рокафеллару) выпуклого неограниченного множества, доказать, что этот конус можно представить как геометрическую разность исходного выпуклого множества с ним же самим.

Определить ещё два класса выпуклых касательных конусов к данному невыпуклому множеству в точке. Это нижний асимптотический касательный конус и верхний асимптотический касательный конус. Установить взаимосвязь всех классов касательных конусов и показать, что для выпуклого множества все классы касательных конусов совпадают между собой.

Контрольные вопросы.

1. Какой касательный конус больше: нижний, верхний или Кларка?

2. Привести пример множества на плоскости, когда все касательные конусы в данной точке множества различны.

3. Основной недостаток и основное достоинство касательного конуса Кларка.

4. Зачем нужны асимптотические нижний и верхний касательные конусы, их свойства?

5. Найти все касательные конусы в точке (0,0) множества $A = \operatorname{epi} f$, где $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ и $f(0) = 0$.

Тема 4. Выпуклые полунепрерывные снизу функции

Учебная задача. Изучение свойств полунепрерывных и выпуклых функций. Показать, что при изучении выпуклых задач на минимум условие непрерывности функции можно без ущерба ослабить до условия полунепрерывности снизу. Познакомиться с важными классами выпуклых функций, таких как функция Минковского и опорная функция.

Обзор темы. Дать понятия эффективного множества и надграфика функции, понятия положительно-однородной функции и собственной функции, определённой на банаховом пространстве.

Дать определения полунепрерывной снизу функции в точке и просто: полунепрерывной снизу функции.

Связь полунепрерывности снизу функции с замкнутостью лебеговых множеств уровня и замкнутостью надграфика этой функции.

Ввести понятие замыкания функции. Доказать теорему Вейерштрасса о достижении точной нижней грани собственной полунепрерывной снизу функции, заданной на компактном топологическом пространстве.

Дать определение выпуклой функции через надграфик этой функции. Неравенство Иенсена для выпуклой функции. Дать определение вогнутой функции. Привести примеры выпуклых функций: аффинная функция, норма, неотрицательно определённая квадратичная форма в гильбертовом пространстве, индикаторная функция выпуклого множества.

Дать определение функции Минковского (калибровочной функции) выпуклого множества. Доказать её свойства: положительную однородность, выпуклость, полунепрерывность снизу, монотонное убывание как функции множества.

Привести примеры вычисления функций Минковского для шара и куба.

Дать определение опорной функции множества. Доказать её свойства: полунепрерывность снизу, положительная однородность, выпуклость. Доказать, что для ограниченного множества опорная функция удовлетворяет условию Липшица.

Привести примеры вычисления опорных функций для шара и квадрата.

Дать определение выпуклой оболочки (невыпуклой) функции, обсудить её свойства.

Контрольные вопросы

1. Что геометрически означает полунепрерывность снизу функции? Привести пример разрывной в точке функции, полунепрерывной снизу в этой точке.

2. Привести пример невыпуклой функции, у которой выполнено неравенство Иенсена: а) при $\lambda = \frac{1}{2}$; б) при всех рациональных $\lambda \in \in (0,1)$.

3. Какое свойство функции Минковского соответствует её второму названию как калибровочная функция.

4. Доказать непрерывность опорной функции для ограниченного множества.

5. Найти опорную функцию $s(p,A)$ множества $A = \{(x_1,x_2) \in \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + (x_2+1)^2 \leqslant 2,\ x_2 \geqslant 0\}$.

6. Найти функцию Минковского множества

$$A = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1^{2/3} + 4x_2^{2/3} \leqslant 5\}.$$

7. Доказать равенство и неравенство

$$s(p,A+B) = s(p,A) + s(p,B),$$
$$s(p,A \overset{*}{-} B) \leqslant \mathrm{co}(s(p,A) - s(p,B)).$$

8. Доказать неравенство

$$\mathrm{co}(f+g)(x) \geqslant \mathrm{co}\, f(x) + \mathrm{co}\, g(x).$$

9. Доказать равенство

$$\mathrm{co}(f(x) + \langle p,x\rangle + \alpha) = \mathrm{co}\, f(x) + \langle p,x\rangle + \alpha.$$

10. В каком случае выпуклая оболочка собственной функции может оказаться несобственной функцией. Привести пример.

Тема 5. Непрерывность выпуклых функций

Учебная задача. Показать, что любая выпуклая функция, ограниченная на некотором открытом множестве, является непрерывной функцией.

Обзор темы. Доказать теорему о том, что для собственной выпуклой функции эквивалентны условия:

1) функция ограничена на некотором открытом множестве;

2) внутренность эффективного множества функции не пуста и функция локально липшицева на внутренности эффективного множества;

3) внутренность надграфика не пуста.

Доказать, что если функция является собственной выпуклой функцией, определённой на $\mathbb{R}^n$, то такая функция локально выпукла на относительной внутренности её эффективного множества.

Показать, что в общем случае банахова пространства выпуклая функция, у которой внутренность эффективного множества пуста, может оказаться разрывной в каждой точке.

Контрольные вопросы

1. Привести пример выпуклой функции, эффективное множество которой есть отрезок в $\mathbb{R}^1$, и которая является непрерывной в каждой внутренней точке эффективного множества, но не является липшицевой на всём отрезке.

2. Доказать, что функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n^2 \cdot n$, где $x \in l_2$, выпукла на $\operatorname{dom} f = \{x \in l_2 \mid \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n^2 n < +\infty\}$, но $\operatorname{int}\operatorname{dom} f = \varnothing$ и эта функция разрывна в каждой точке из $\operatorname{dom} f$.

Тема 6. Отделимость выпуклых множеств

Учебная задача. Показать, что непересекающиеся выпуклые множества могут быть разделены некоторой гиперплоскостью, т.е. одно выпуклое множество принадлежит одному полупространству, а другого — другому (дополняющему первое) полупространству.

Научить различным видам отделимости: простой, строгой и сильной.

Обзор темы. Дать понятие о топологической отделимости множеств в различных пространствах. Доказать, что в банаховом пространстве для непересекающихся компакта и замкнутого множества существует число $\varepsilon > 0$ такое, что открытая ε-окрестность компакта также не пересекается с замкнутым множеством.

Для непересекающихся выпуклых множеств из банахова пространства дать определения того, что

1) гиперплоскость разделяет (или отделяет) два множества;

2) гиперплоскость строго разделяет два множества;

3) гиперплоскость сильно разделяет два множества.

Дать определение проекции точки a на множество A как множество точек из этого множества A, которые являются ближайшими до a.

Показать, что проекция может быть пуста, состоять из одной точки или же быть множеством точек.

Доказать, что в гильбертовом пространстве для любой точки, не принадлежащей данному выпуклому замкнутому множеству, существует проекция этой точки на множества, притом она состоит из одной точки. С помощью этого утверждения доказать, что в гильбертовом пространстве для данного замкнутого выпуклого множества и данной точки, не принадлежащей этому множеству, существует гиперплоскость, строго разделяющая данные точку и множество. В качестве следствия доказать вторую теорему отделимости в гильбертовом пространстве о том, что два непересекающиеся выпуклые замкнутые множества из гильбертова пространства, одно из которых — компакт, можно сильно разделить некоторой гиперплоскостью.

Дать определение опорной гиперплоскости (и опорного функционала) ко множеству в его граничной точке как гиперплоскость, которая отделяет эту граничную точку от данного множества.

Показать, что в гильбертовом пространстве в тех граничных точках выпуклого замкнутого множества, которые являются проекциями некоторых внешних точек, опорные гиперплоскости существуют. Привести пример, в котором у некоторой граничной точки выпуклого множества из гильбертова пространства не существует опорной гиперплоскости.

Доказать, что в случае множеств из $\mathbb{R}^n$ у всякого выпуклого замкнутого множества в любой его граничной точке существует опорная гиперплоскость.

С помощью этого утверждения доказать в $\mathbb{R}^n$ первую теорему отделимости о том, что для двух непересекающихся выпуклых множеств, одно из которых открыто, существует гиперплоскость, которая строго разделяет данные множества.

Контрольные задачи

1. Чем отличается топологическая отделимость от отделимости выпуклых множеств?

2. Пусть даны выпуклое замкнутое множество A из гильбертова пространства H и точки $x,y \in A$. Показать, что для проекций $P_A x$ и $P_A y$ точек x и y на A выполнено неравенство

$$\|P_A x - P_A y\| \leqslant \|x - y\|.$$

3. Привести пример двух непересекающихся замкнутых множеств из $\mathbb{R}^2$, которые можно разделить строго, но нельзя сильно.

4. Рассмотрим гильбертово пространство l_2, состоящее из векторов x, являющихся последовательностями $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, у которых $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} x_k^2 < +\infty$. Рассмотрим в l_2 «гильбертов кирпич». т.е. множе-

ство $A = \{x \in l_2 \mid |x_k| \leqslant \frac{1}{k} \ \forall\, k\}$. Проверить, что A есть выпуклый компакт в l_2 и $0 \in \partial A$. Доказать, что в точке 0 не существует опорной гиперплоскости ко множеству A.

Тема 7. Отделимость множеств в банаховых пространствах

Учебная задача. Показать, что в банаховых пространствах (и в более общих: локально выпуклых линейных топологических пространствах) имеют место аналогичные изложенным в теме 6 первая и вторая теоремы отделимости выпуклых множеств. Однако для получения этих результатов потребуется иная техника, основанная на теореме Хана–Банаха о продолжении линейного функционала.

Обзор темы. Сформулировать фундаментальную теорему функционального анализа — теорему Хана–Банаха о том, что линейный функционал, заданный на линейном подпространстве и ограниченный сверху выпуклой положительно однородной функцией (мажорантой), может быть продолжен на всё пространство с сохранением мажоранты.

С помощью теоремы Хана–Банаха доказать первую теорему о строгой отделимости двух непересекающихся выпуклых множеств из банахова пространства в случае, когда одно из множеств открыто. В качестве мажоранты в доказательстве используется функция Минковского.

Для случая, когда одно из непересекающихся замкнутых выпуклых множеств из банахова пространства является компактом с помощью теоремы о топологической отделимости и первой теоремы об отделимости доказать вторую теорему о сильной отделимости.

Пояснить, что аналогичные теоремы об отделимости справедливы для множеств из локально выпуклых линейных топологических пространств.

Показать, как следствие теорем об отделимости, что для выпуклых множеств из банахова пространства их замкнутость и слабая замкнутость эквивалентны.

Доказать опорный принцип (или принцип двойственности) выпуклых множеств, состоящий в том, что любое замкнутое выпуклое множество из банахова пространства совпадает с пересечением всех содержащих его замкнутых полупространств.

Сформулировать утверждение о том, что банахово пространство с сильной топологией (по норме) и его сопряжённое пространство со слабой* топологией находятся в двойственности.

Как следствие получить утверждение о том, что слабо* замкнутое выпуклое множество B в сопряжённом пространстве E^* и функционал $p_0 \notin B$ строго отделимы некоторой точкой из пространства E.

Дать определение «слабо полунепрерывной снизу функции». Доказать, что всякая слабо полунепрерывная снизу функция является полунепрерывной снизу. Доказать, что выпуклая полунепрерывная снизу функция является слабо полунепрерывной снизу функцией.

Контрольные задачи

1. Доказать, что непустые выпуклые множества A и B из банахова пространства E отделимы (сильно отделимы) функционалом $p \in E^* \setminus \{0\}$ тогда и только тогда, когда $s(p,A) + s(-p,B)$ меньше или равно (строго меньше) нуля.

2. Доказать, что дополнение к открытому шару $B_r^0(0)$ в гильбертовом пространстве является замкнутым, но не является слабо замкнутым множеством.

Тема 8. Сопряжённые функции

Обзор темы. Дать определение и изучить свойства преобразования Лежандра–Юнга–Фенхеля собственной функции, которое также называется сопряжённой функцией. Изучить свойства выпуклых функций, получаемые из опорного принципа множеств, применённого к надграфику функции.

Учебная задача. Доказать теорему о том, что любую собственную выпуклую полунепрерывную снизу функцию можно представить как поточечную точную верхнюю грань аффинных функций, не превосходящих данную выпуклую функцию.

Дать определение преобразования Лежандра–Фенхеля–Моро о том, что собственная функция выпукла и полунепрерывна снизу тогда и только тогда, когда вторая сопряжённая функция совпадает с данной функцией.

Привести примеры вычисления функции, сопряжённой к данной функции.

Привести правило вычисления выпуклой замкнутой оболочки через вторую сопряжённую функцию.

Доказать, что сопряжённая функция к невыпуклой функции f совпадает с сопряжённой функцией к выпуклой замкнутой оболочке функции f.

Дать определение инфимальной конволюции. Доказать теорему о том, что сопряжённая функция от суммы функций равна замыканию инфимальной конволюции от функций, сопряжённых данным, и что сопряжённая функция от инфимальной конволюции двух функций равна сумме сопряжённых функций от данных функций.

Контрольные задачи

1. Почему сопряжённая функция является выпуклой?

2. Что больше: $f(x)$ или $f^{**}(x)$ в точке x для произвольной функции f?

3. Пусть $f(x) = |x| + \sin x$, $x \in \mathbb{R}^1$. Найти $f^*(p)$ и $f^{**}(x)$.

4. Найти сопряжённую функцию f^* для функции:

а) $f(x) = \|x\|$, $x \in H$;

б) $f(x_1,x_2) = \sqrt{2x_1^2 + 3x_2^2}$;

в) $f(x_1,x_2) = 3|x_1| + 4|x_2| + 1$;

г) $f(x_1,x_2) = \max\{|x_1|, 2|x_2|\}$.

5. Для функций $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = (x+1)^2$, $x \in \mathbb{R}$, найти инфимальную конволюцию

$$(f_1 \oplus f_2)(x).$$

6. Показать, что в гильбертовом пространстве равенство $f^*(x) = f(x)$ возможно лишь для функции $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$.

7. Показать, что для собственной выпуклой полунепрерывной снизу функции f справедливо равенство

$$\inf\{f(x) \mid x \in E\} = -f^*(0).$$

Тема 9. Вычисление выпуклых оболочек множеств и функций

Учебная задача. Научить вычислять выпуклые оболочки множеств и функций, используя аппарат опорных функций.

Обзор темы. Доказать, что если известна опорная функция $s(p,A)$ невыпуклого множества A из банахова пространства, то выпуклая замкнутая оболочка этого множества A может быть вычислена как пересечение полупространств вида $H_p = \{x \mid \langle p,x\rangle \leqslant s(p,A)\}$ по всем p из единичной сферы сопряжённого пространства.

Доказать утверждение: Пусть множество A (быть может пустое) представлено как пересечение полупространств $H_p = \{x \mid \langle p,x\rangle \leqslant f(p)\}$ по всем $p \in E^*$, $\|p\| = 1$, причём функция $f\colon\ E^* \to \overline{\mathbb{R}}$ является собственной положительно однородной функцией. Это множество A не пусто тогда и только тогда, когда функция $\overline{\mathrm{co}}f(p)$ является собственной функцией, при этом справедливо равенство: $s(p,A) = \overline{\mathrm{co}}f(p)$, $\forall\, p \in E^*$.

Доказать следствие о том, что если $f(p)$ есть собственная выпуклая полунепрерывная снизу положительно однородная функция в E^*, то существует непустое выпуклое замкнутое множество A такое, что $f(p) = s(p,A)$ (т.е. функция $f(p)$ является опорной функции этого множества).

Доказать, что опорная функция геометрической разности выпуклых множеств A и B равняется выпуклой замкнутой оболочке разности опорных функций $s(p,A)$ и $s(p,B)$.

Доказать, что для выпуклых замкнутых ограниченных множеств A и B хаусдорфово расстояние между этими множествами равняется точной верхней грани от модуля разности опорных функций $s(p,A)$ и $s(p,B)$ по всем p из единичной сферы.

Используя теорему Каратеодори, доказать формулу вычисления выпуклой оболочки функции, определённой на $\mathbb{R}^n$, через точную нижнюю грань по всем выпуклым комбинациям значений функции в не более чем $(n+1)$ точках из $\mathbb{R}^n$.

Контрольные задачи

1. Как вычислить опорную функцию объединения двух множеств, зная опорные функции этих множеств.
2. Как вычислить опорную функцию пересечения двух выпуклых замкнутых множеств по опорным функциям данных множеств.
3. Найти выпуклую оболочку функции $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ вида

а) $f(x_1,x_2) = x_1 + x_2 + \sin(x_1 + x_2)$;

б) $f(x_1,x_2) = x_1 - x_2 + \cos(x_1 - x_2)$.

Тема 10. Производные по направлениям для выпуклых функций

Учебная задача. Изучить свойства производных по направлениям для выпуклых функций.

Обзор темы. Напомнить определение производной по Гато функции, определённой на банаховом пространстве. Необходимое и достаточное условие выпуклости для дифференцируемой по Гато функции.

Дать определение производной по направлениям функции. Показать её связь с производной по Гато, если последняя существует.

Доказать теорему о том, что у выпуклой функции производная по направлениям существует (конечная или бесконечная) и представима через инфинум. При этом производная по направлениям является положительно однородной выпуклой функцией.

Доказать следствие о том, что если выпуклая функция непрерывна в точке $x_0 \in E$, то её производная в этой точке по направлениям является непрерывной функцией направлений.

Доказать следствие о том, что если отрезок $[x_0 - \varepsilon y; x_0 + \varepsilon y]$ принадлежит эффективному множеству выпуклой функции f, то производная $f'(x_0; y)$ конечна.

Установить связь надграфика производной по направлениям выпуклой функции f в точке x_0 с касательным конусом к надграфику данной функции f в точке $(x_0; f(x_0))$.

Контрольные задачи

1. Привести в $\mathbb{R}^2$ пример функции разрывной в точке, но дифференцируемой по Гато в этой точке.

2. Привести пример выпуклой функции f и точек $x_0 \in \operatorname{dom} f$, $y \in E$ таких, что $f'(x_0; y) = -\infty$.

3. Пусть $g(x)$ — выпуклая положительно однородная непрерывная функция. Доказать, что для любых $x_0 \in E$, $y \in E$ справедливы выражения: $g'(x_0; y) \leqslant g(y)$; $g'(0; y) = g(y)$; $g'(y; y)$; $g'(y; -y) = -g(y)$.

4. Пусть собственная функция $f\colon E \to \overline{R}$ выпукла и непрерывна в точке x_0. Доказать, что функция $f'(x_0; \cdot)$ непрерывна и выпукла.

Тема 11. Субдифференциал выпуклой функции

Учебная задача. Ввести обобщение понятия производной для выпуклых функций и изучить его свойства.

Обзор темы. Дать определение субградиента выпуклой функции $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ в точке x_0 из банахова пространства E как функционал из сопряжённого пространства E^*, задающий опорную к функции f аффинную функцию в E. Дать определение субградиента выпуклой функции $f\colon E^* \to \overline{\mathbb{R}}$ в точке p_0 из сопряжённого банахова пространства E^* как точку x_0 исходного банахова пространства E, задающую опорную к функции f аффинную функцию в сопряжённом пространстве E^*.

Дать определение субдифференциала выпуклой функции в точке как совокупность всех субградиентов в этой точке.

Разобрать примеры вычисления субдифференциала: 1) нормы; 2) произвольной положительно однородной функции; 3) индикаторной функции выпуклого множества; 4) опорной функции.

Установить связь субдифференциала функции в точке x_0 и субдифференциала производной по направлениям этой же функции.

Доказать теорему о том, что у собственной выпуклой функции f в точке $x_0 \in E$ субдифференциал не пуст тогда и только тогда, когда её производная в точке $x_0 \in E$ по направлениям является собственной полунепрерывной снизу в нуле функцией. При этом субдифференциал (если он не пуст) является выпуклым слабо* замкнутым множеством, причём опорная функция субдифференциала в любой точке y равна замыканию производной функции f в точке x_0 по направлению y.

Доказать теорему о том, что если выпуклая функция f непрерывна в точке x_0, то её субдифференциал в этой точке есть непустое выпуклое слабо* компактное множество.

В случае, когда выпуклая функция имеет производную по Гато, установить связь субдифференциала с производной по Гато.

Разобрать свойства субдифференциала (и его опорной функции) для положительно однородной непрерывной выпуклой функции в точке нуль.

Доказать теорему о том, что у собственной выпуклой полунепрерывной снизу функции f включение $p_0 \in \partial f(x_0)$ эквивалентно равенству $f(x_0) + f^*(p_0) = \langle p_0, x_0 \rangle$ или включению $x_0 \in \partial f^*(p_0)$.

Контрольные задачи

1. Чем отличаются определения субградиента и субдифференциала для функций, определённых на банаховых пространствах от определения для функций, определённых на сопряжённых банаховых пространствах?

2. Доказать, что положительно однородная выпуклая непрерывная функция g совпадает с опорной функцией от субдифференциала функции g в нуле.

3. Пусть выпуклая функция $f\colon\ E \to \overline{R}$, в некоторой точке x_0 имеет производную по Гато $f'_\Gamma(x_0)$. Доказать, что субдифференциал $\partial f(x_0)$ состоит из одной точки $f'_\Gamma(x_0)$.

4. Найти субдифференциал функции во всех точках

а) $f(x_1,x_2) = \sqrt[3]{|x_1|^3 + x_2^4}$;

б) $f(x_1,x_2) = \max\{|2x_1|, 3|x_2|\}$.

5. Найти субдифференциал в нуле опорной функции множества

$$A = \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} \leqslant 1\right\}.$$

6. Пусть $A = \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x_1| + 2|x_2| \leqslant 1\right\}$ и функция $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ +\infty, & x \notin A. \end{cases}$ Найти $\partial f(1,0)$ и $\partial f\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

7. Какое геометрическое свойство выпуклого замкнутого множества $A \subset \mathbb{R}^n$ означает тот факт, что для всех $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$, субдифференциал $\partial s(p,A)$ состоит из одной точки?

8. Чему равен субдифференциал опорной функции $s(p,A)$ в точке $p_0 = 0$?

9. Доказать, что для выпуклой функции f справедлива формула

$$\partial f(x_0) = \mathrm{dom}(f'(x_0;\cdot))^*.$$

10. Доказать равенство

$$\partial f(x_0) = \{p \in E^* \mid f'(x_0; y) \geqslant \langle p,y\rangle \ \forall\, y \in E\}.$$

Тема 12. Основные теоремы субдиференциального исчисления

Учебная задача. Научить вычислять субдифференциал максимума двух функций и субдифференциал суммы двух функций через субдифференциал этих двух функций.

Обзор темы. Доказать лемму о том, что субдифференциал в нуле максимума двух непрерывных положительно однородных функций равен выпуклой оболочке объединения субдифференциалов в нуле каждой из двух данных функций.

С помощью этой леммы доказать теорему Дубовицкого–Милютина о субдифференциале максимума двух выпуклых функций.

Доказать теорему Моро–Рокафеллара о том, что при определённых условиях субдифференциал суммы двух выпуклых функций равен сумме субдифферениалов этих функций.

Доказать следствие теоремы о субдифференциале суммы конечного числа функций.

Получить необходимое и достаточное условие минимума выпуклой функции на выпуклом замкнутом множестве.

Ввести понятие нормального конуса ко множеству в точке.

Доказать при определённых условиях формулу вычисления нормального конуса для пересечения множеств через сумму нормальных конусов для множеств, входящих в пересечение.

Контрольные задачи

1. Найти субдифференциал функции

$$f(x_1,x_2) = \max\left\{|x_1| + |x_2|;\ 1{,}2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right\}$$

в точке (0,0).

2. Найти субдифференциал функции

$$f(x_1,x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \max\{|x_1 - 5|; |x_2 + 5|\}$$

в точках (0,0) и (5,−5).

3. Найти нормальные конусы множеств A_1, A_2 и $A = A_1 \cap A_2$ в точке $0 \in A_1 \cap A_2$, где

а) $A_1 = \{(x_1,x_2) \mid x_2 \geqslant x_1^2\}$; $A_2 = \{(x_1,x_2) \mid x_2 \leqslant -x_1^2\}$;

б) $A_1 = \{(x_1,x_2) \mid x_2 \geqslant x_1^2\}$; $A_2 = \{(x_1,x_2) \mid x_1 \geqslant x_2^2\}$.

Проверить выполнение утверждения о нормальном конусе для пересечения множеств. Объяснить несоответствие.

4. Пусть функция $f\colon R^2 \to \overline{R}^1$ такова, что $f(x_1,x_2) = 2x_1^2 + x_2^2$ на множестве $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x_1|,|x_2|\} \leqslant 1\}$ и $f(x_1,x_2) = +\infty$ в остальных точках. Найти субдифференциал $\partial f(1,-1)$.

5. Пусть функция $f\colon \mathbb{R}^2 \to \overline{R}^1$ такова, что $f(x_1,x_2) = \max\{2|x_1|,|x_2|\}$ на множестве $\{(x_1,x_2) \mid (x_1-1)^2 + x_2^2 \leqslant 4\}$, и $f(x_1,x_2) = +\infty$ в остальных точках. Найти субдифференциал $\partial f(1,-2)$.

Тема 13. Поляра множеств

Учебная задача. Изучить свойства поляры множества, введённой Г.Минковским.

Обзор темы. Дать определения поляры и биполяры для множеств из банахова пространства и множеств из сопряжённого пространства.

Доказать свойства поляры: выпуклость, замкнутость, содержание точки 0, связь поляр для множеств, одно из которых содержит другое, выражение поляры через опорную функцию множества.

Решить примеры вычисления поляры шара и полупространства.

Доказать формулу вычисления биполяры множества через исходное множество.

Установить условия на множество, при которых биполяра совпадает с исходным множеством.

Доказать формулы вычисления поляры для множеств, представимых в виде объединения или пересечения множеств.

Доказать лемму о том, что поляра конечной суммы выпуклых конусов равняется пересечению поляр исходных конусов.

Доказать лемму о том, что поляра пересечения конечного числа выпуклых конусов совпадает с замыканием суммы поляр исходных конусов.

Доказать, что поляра конической выпуклой оболочки множества $(A-a)$, где $a \in \partial A$, совпадает с нормальным конусом ко множеству A в точке a.

Пусть множество A задаётся в виде $A = \{x \in E \mid f(x) \leqslant 0\}$, где f — собственная выпуклая функция, непрерывная на A, пусть существует точка $x_1 \in E$ такая, что $f(x_1) < 0$ и пусть $x_0 \in E$ такова, что $f(x_0) = 0$.

Доказать, что тогда поляра конической выпуклой оболочки субдифференциала $\partial f(x_0)$ совпадает с конической выпуклой оболочкой множества $(A - x_0)$.

Контрольные задачи

1. Чем отличаются определения поляры в банаховом пространстве E от поляры в сопряжённом к банахову пространству E^*?

2. Найти поляры множеств

а) $A_1 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \leqslant 2,\ x_2 - x_1 \leqslant 2,\ x_2 \geqslant 0\}$;

б) $A_2 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \geqslant -1,\ x_2 - x_1 \leqslant 3,\ 5x_1 + x_2 \leqslant 10\}$;

в) $A_3 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geqslant 0,\ x_2 + 3x_1 \leqslant 3,\ x_2 \geqslant 0\}$;

г) $A_4 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \geqslant -2,\ x_1 \leqslant 1,\ x_2 \leqslant 3\}$;

3. Пусть выпуклое замкнутое множество $A \subset E$ таково, что $0 \in$ $\in \operatorname{int} A$. Доказать, что

а) $s(p,A) = \mu(p,A^\circ) \quad \forall\, p \in E^*$;

б) $s(x,A^\circ) = \mu(x,A) \quad \forall\, x \in E$.

Тема 14. Задача выпуклого программирования

Учебная задача. Определить задачу выпуклого программирования. Написать необходимые условия условного экстремума в данной задаче. Ввести и обосновать метод Лагранжа для этой задачи.

Обзор темы. Дать постановку задачи минимизации выпуклой функции, определённой на выпуклом замкнутом множестве, (т.е. задачи на условный минимум). Дать необходимые и достаточные условия для точки минимума в этой задаче через субдифференциал функции и нормальный конус ко множеству ограничения.

Рассмотреть случай такой задачи, когда выпуклое замкнутое множество ограничения есть пересечение выпуклых замкнутых множеств, задаваемых в виде конечного числа лебеговых множеств некоторых выпуклых функций.

В этом случае задача называется задачей выпуклого программирования.

При дополнительном условии (условии Слейтера), используя лемму о представлении нормального конуса пересечения множеств, входящих в ограничения через сумму нормальных конусов от каждого из множеств, а также то, что каждый нормальный конус к лебегову множеству функции совпадает с конической оболочкой субдифференциала этой функции, показать, что необходимые и достаточные условия минимума в задаче выпуклого программирования эквивалентны необходимым и достаточным условиям безусловного минимума некоторой функции на всём пространстве (т.е. без ограничений) и некоторым условиям (условиям «дополняющей нежёсткости»). Полученную функцию назвать функцией Лагранжа.

Контрольные задачи

1. Как перейти от задачи нахождения условного минимума выпуклой функции на выпуклом замкнутом множестве к задаче на безусловный минимум некоторой функции по всему пространству?

2. В каком случае нормальный конус пересечения выпуклых множеств совпадает с суммой нормальных конусов выпуклых множеств, входящих в пересечение?

3. Зачем нужно условие Слейтера в задаче выпуклого программирования? Привести пример задачи выпуклого программирования, в которой не выполнены условия Слейтера и для любой указанной выше функции типа Лагранжа не выполняется необходимое субдифференциальное условие оптимальности в точке минимума (т.е. x_0 — точка минимума, но $0 \notin \partial\mathcal{L}(x_0,\lambda)$, где $\mathcal{L}(x,\lambda) = f_0(x) + \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x)$).

Тема 15. Обобщение выпуклых функций: локально выпуклые функции, слабо и сильно выпуклые функции. Обобщение задачи выпуклого программирования

Учебная задача. Показать как, используя аппарат выпуклого анализа, можно решать некоторые негладкие и невыпуклые задачи на условный минимум.

Обзор темы. Определить понятие локально выпуклой функции по Иоффе–Тихомирову и определить субдифференциал такой функции. Определить понятие регулярно локально выпуклой функции по Иоффе–Тихомирову.

Показать, что основные свойства субдифференциалов выпуклых функций сохраняются для регулярно локально выпуклых функций (суммы функций, максимума функций).

Определить понятие r-выпуклой функции при $r \in \mathbb{R}$, объединяющее понятия сильно и слабо выпуклых функций. Представление r-выпуклой функции в виде суммы или разности некоторой выпуклой функции и квадрата нормы. В силу этого доказать существования у r-выпуклых функций выпуклых производных по направлениям, и что r-выпуклые функции являются локально выпуклыми функциями.

Получить субдифференциальное неравенство для r-выпуклых функций.

Рассмотреть задачу нахождения минимума r_0-выпуклой функции f_0 на множестве, представимом в виде пересечения конечного числа лебеговых множеств различных r_k-выпуклых функций f_k.

Доказать теорему о необходимых условиях минимума в такой задаче в виде субдифференциального включения $0 \in \partial\mathcal{L}(x_0,\lambda)$, где $\mathcal{L}(x,\lambda) = f_0(x) + \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k f_k(x)$ — функция Лагранжа.

Тем самым распространить метод Лагранжа на указанный тип задач.

Контрольные задачи

1. При каких $r \in \mathbb{R}$ r-выпуклая функция является выпуклой?

2. Какие из указанных функций являются r-выпуклыми (если да, то указать максимальное значение r):

1) $f_1(x) = -\|x\| + \|x\|^2$; 2) $f_2(x) = \|x\| - \|x\|^2$, $x \in \mathbb{R}^n$;

3) $f_3(x) = -\|x\| + \|x\|^2$; 4) $f_4(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, $x > 0$;

5) $f_5(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}^1$; 6) $f_6(x) = -x^4$, $x \in \mathbb{R}^1$;

7) $f_7(x) = x^4$, $x \geqslant 1$; 8) $f_8(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$;

9) $f_9(x) = |x_1| - 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_4^2$, $x \in \mathbb{R}^4$.

3. Найти субдифференциал $\partial f(0)$ функции

$$f(x) = 2\|x\| - \|x + a\|^2, \quad x \in H, \quad a \in H.$$

4. Пусть $n \times n$ матрица A такова, что у неё существует n различных вещественных собственных значений. Является ли функция $f(x) = \langle Ax,x\rangle$, $x \in \mathbb{R}^n$, r-выпуклой?

Задачи для подготовки к экзамену по курсу «Выпуклый анализ»

Основные задачи

Задача 1. Показать, что для произвольных замкнутых множеств A и B из банахова пространства E сумма (по Минковскому) этих множеств $A + B$ может оказаться не замкнутым множеством. Доказать, что если одно из этих множеств является компактом, то множество $A + B$ замкнуто. Доказать, что если оба множества A и B компактны, то сумма $A + B$ также компакт.

Задача 2. Пусть множество A из банахова пространства E выпукло и его внутренность $\operatorname{int} A \neq \varnothing$. Доказать, что множество $\operatorname{int} A$ выпукло и всюду плотно в $\overline{A}$.

Задача 3. Показать, что замкнутость множества A не гарантирует замкнутости множества $\operatorname{co} A$ даже на плоскости $\mathbb{R}^2$.

Задача 4. Пусть A, B, C, D — замкнутые множества из банахова пространства E_1, $T : E_1 \to E_2$ — непрерывный линейный оператор, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Пусть $\|A\| = \sup\{\|a\| \mid a \in A\}$, $h(\cdot,\cdot)$ — хаусдорфово расстояние между множествами. Доказать, что справедливы неравенства

$$h(A+B,C+D) \leqslant h(A,C)+h(B,D),\;\; h(\alpha A,\alpha B) \leqslant |\alpha| h(A,B),$$
$$h(\alpha A,\beta A) \leqslant |\alpha-\beta|\|A\|,\;\; h(TA,TB) \leqslant \|T\| h(A,B),$$
$$h(\operatorname{co} A, \operatorname{co} B) \leqslant h(A,B),\;\; h(\overline{\operatorname{co}}\, A, \overline{\operatorname{co}}\, B) \leqslant h(A,B).$$

Задача 5. Показать, что имеет место включение

$$T_{\text{н}}\left(\bigcap_{k=1}^{m} A_k; 0\right) \subset \bigcap_{k=1}^{m} T_{\text{н}}(A_k; 0),$$

и при этом оно может быть строгим.

Задача 6. Найти все (нижний, верхний, Кларка, асимптотический нижний и асимптотический верхний) касательные конусы в точке $0 \in \mathbb{R}^2$ для множества $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < |x|, x \in (-\infty,+\infty)\}$.

Задача 7. Доказать, что дифференцируемая функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ выпукла тогда и только тогда, когда для любых $x,y \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство $f(x) - f(y) \geqslant \langle \nabla f(y), x-y \rangle$.

Задача 8. Найти опорную функцию: а) отрезка $[a,b] \subset \mathbb{R}^n$, б) n-мерного куба с ребрами длины 2, параллельными осям координат и центром в нуле.

Задача 9. Найти функцию Минковского эллипсоидального тела вида

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1\}.$$

Задача 10. Доказать, что замкнутое множество A в банаховом пространстве E является выпуклым тогда и только тогда, когда функция $x \to \varrho(x,A) = \inf\limits_{a \in A} \|x-a\|$ выпукла.

Задача 11. Привести пример выпуклой функции $f : B_1(0) \to \mathbb{R}$, где $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$, которая в точке (1;0) не пн. сн. и не пн. св.

Задача 12. Доказать, что в $\mathbb{R}^n$ всякая выпуклая функция f непрерывна на множестве $\operatorname{int} \operatorname{dom} f$.

Задача 13. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое выпуклое множество, $T = [0;1]$. Функция $f : T \times U \to \mathbb{R}$ обладает свойствами: 1) $\forall t \in T$ функция $x \to f(t,x)$ выпукла и 2) $\forall x \in U$ функция $t \to f(t,x)$ непрерывна. Доказать, что f непрерывна по совокупности переменных на $T \times U$.

Задача 14. Доказать, что непустые множества A и B из банахова пространства E отделимы функционалом $p \in E^* \backslash \{0\}$ тогда и только тогда, когда справедливо неравенство

$$s(p,A) + s(-p,B) \leqslant 0.$$

Задача 15. Пусть A — выпуклое замкнутое подмножество гильбертова пространства $\mathcal{H}$, $x,y \notin A$. Показать, что для проекций $P_A x$ и $P_A y$ точек x и y на A выполнено неравенство $\|P_A x - P_A y\| \leqslant \|x - y\|$.

Задача 16. Показать, что для функции $\varphi(t) = (1/\alpha)|t|^\alpha$ функция $\varphi^*(t) = (1/\beta)|t|^\beta$, где $(1/\alpha) + (1/\beta) = 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, является сопряженной.

Задача 17. Показать справедливость неравенства Фенхеля:

$$\langle p,x\rangle \leqslant f(x) + f^*(p), \ \ \forall x \in E, \, p \in E^*.$$

Задача 18. Показать, что в гильбертовом пространстве равенство $f^* = f$ возможно лишь для функции $f(x) = \|x\|^2/2$.

Задача 19. Показать, что для выпуклой, собственной пн.сн. функции f справедливо равенство $\inf\limits_{x\in E} f(x) = -f^*(0)$.

Задача 20. Найти сопряженную функцию f^* для функции
1) $f(x_1,,x_2) = \max\{|x_1|,|x_2|\}$;
2)$f(x_1,,x_2) = |x_1| + |x_2|$;
3) $f(x_1,,x_2) = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + 1}$.

Задача 21. Показать, что неравенство $s(p,A) \leqslant s(p,B)$ $\forall p$ справедливо тогда и только тогда, когда справедливо включение $A \subset \subset \overline{\mathrm{co}}\, B$.

Задача 22. Показать, что $s\left(p, \bigcup\limits_\alpha A_\alpha\right) = \sup\limits_\alpha s(p,A_\alpha)$.

Задача 23. Множество A замкнуто и $x \in \operatorname{int} \mathrm{co}\, A$. Доказать, что $s(p,A) > \langle p,x\rangle$ $\forall p \in E^* \backslash \{0\}$.

Задача 24. Множества A, D замкнуты, а множество B ограничено, выпукло и замкнуто. Доказать, что из включения $A + B \subset B + + D$ следует включение $A \subset \overline{\mathrm{co}}\, D$.

Задача 25. Доказать формулу

$$\overline{\mathrm{co}}\, A = \bigcap_{p\in E^*} \{x \in E \mid \langle p,x\rangle \leqslant s(p,A)\}.$$

Задача 26. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — липшицевая функция с константой $L > 0$, а функция $\mathrm{co}\, f$ — собственная. Доказать, что функция $\mathrm{co}\, f$ также является липшицевой с той же константой L.

Задача 27. Доказать, что для любых функций $f,g : E \to \mathbb{R}$ верно неравенство $\mathrm{co}\, f + \mathrm{co}\, g \leqslant \mathrm{co}(f + g)$. Доказать, что если функция g является аффинной, т.е. $g(x) = \langle p,x\rangle + \alpha$, то указанное неравенство превращается в равенство.

Задача 28. Найти поляру множества

$$A = \bigcap_{k=1}^{n} \{x \in \mathbb{R}^n \mid -k \leqslant \langle p_k,x\rangle \leqslant (k+1)\},$$

где $p_k = (0,...,0,1,0,...,0)$ - k-ый базисный вектор в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Задача 29. Привести в $\mathbb{R}^2$ пример функции разрывной в точке, но дифференцируемой по Гато в этой точке.

Задача 30. Показать (построив соответствующие примеры), что для различных точек границы $\partial \operatorname{dom} f$ эффективного множества функции f может оказаться, что $\partial f(x) \neq \varnothing$, так и $\partial f(x) = \varnothing$.

Задача 31. Найти субдифференциал функции $f(x_1,x_2) = |x_1| + |x_2| + 1$ при всех $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Задача 32. Найти субдифференциал функции $f(x_1,x_2) = \max\{|x_1| + |x_2|,\ 1.2 \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\}$ в точке $(0,0)$.

Задача 33. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт. Как субдифференциал опорной функции $s(p,A)$ в произвольной точке $p \not\equiv 0$ связан со множеством A? В каком случае субдифференциал опорной функции является одноточечным множеством во всех точках границы множества?

Дополнительные задачи

Задача 34. Привести пример невыпуклого множества A из банахова пространства, удовлетворяющего условию: для любых точек $x_1,x_2 \in A$ справедливо включение $\frac{x_1 + x_2}{2} \in A$. Показать, что если замкнутое множество A удовлетворяет приведенному выше условию, то оно является выпуклым.

Задача 35. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \operatorname{int} \operatorname{co} A$. Доказать, что найдутся точки $\{a_i\}_{i=1}^k \subset A$, где $k \leqslant 2n$, такие, что $x \in \operatorname{int} \operatorname{co} \bigcup\limits_{i=1}^k \{a_i\}$.

Задача 36. Пусть даны произвольные выпуклые множества $M,A,B \subset E$ и числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Доказать, что справедливо равенство

$$\Big(\Big((M + \alpha A) \overset{*}{-} \alpha B\Big) + \beta A\Big) \overset{*}{-} \beta B = (M + (\alpha + \beta)A) \overset{*}{-} (\alpha + \beta)B.$$

Задача 37. Пусть в замкнутом и ограниченном множестве из $\mathbb{R}^n$ существует по меньшей мере одна точка такая, что любая проходящая через нее прямая имеет с данным множеством единственный общий отрезок. Доказать, что все точки, обладающие этим свойством, образуют выпуклое тело.

Задача 38. Пусть даны выпуклое ограниченное тело $A \subset \mathbb{R}^n$, вектор $q \in \mathbb{R}^n$, $q \neq 0$, и гиперплоскость $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle q,x \rangle = 0\}$. Каждая прямая $l_a = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = a + \lambda q\}$, где $a \in H$, пересекающая множество A, дает в пересечении отрезок (или точку) $[b_a,c_a] = l_a \bigcap A$, причем $b_a = a + \lambda_1 q$, $c_a = a + \lambda_2 q$ и $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$. Выбирая по всем таким прямым l_a вместо отрезка $[b_a, c_a]$ отрезок

$$\left[a + \frac{b_a - c_a}{2}, a + \frac{c_a - b_a}{2}\right],$$

получаем в совокупности множество $\widetilde{A}$, симметричное относительно гиперплоскости H. Доказать, что множество $\widetilde{A}$ является выпуклым телом, и что диаметр множества $\widetilde{A}$ не превосходит диаметра множества A.

Задача 39. Доказать для нижнего касательного конуса равенство

$$T_{\text{н}}(A; a) = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{\delta>0} \bigcap_{0<\lambda<\delta} \left(\frac{1}{\lambda}(A - a) + B_\varepsilon(0)\right).$$

Задача 40. Доказать для верхнего касательного конуса равенство

$$T_{\text{в}}(A; a) = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{\delta>0} \bigcup_{0<\lambda<\delta} \left(\frac{1}{\lambda}(A - a) + B_\varepsilon(0)\right).$$

Задача 41. Доказать для касательного конуса Кларка равенство

$$T_C(A; a) = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{\delta>0} \bigcap_{0<\lambda<\delta} \bigcap_{b \in A \bigcap B_\delta(a)} \left(\frac{1}{\lambda}(A - b) + B_\varepsilon(0)\right).$$

Задача 42. Показать, что множество

$$O^+ A = \{y \in E \mid \forall x \in A \; \forall \lambda \geqslant 0, \;\; x + \lambda y \in A\}.$$

является выпуклым конусом. Привести пример множества A, у которого его асимптотический конус $O^+ A$ не замкнут.

Задача 43. Привести пример неограниченного замкнутого выпуклого множества в l_2, для которого $O^+ A = \{0\}$.

Задача 44. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — строго выпуклый компакт (т.е. граница M не содержит отрезков) и компакт $A \subset \mathbb{R}^n$ таков, что $M \overset{*}{-} A = \{0\}$ (напомним, что последнее означает, что $A \subset M$ и нельзя сдвинуть компакт A на некоторый вектор $a \neq 0$ так, чтобы этот сдвиг $A + a$ также содержался в M).

1. Доказать, что найдутся точки $\{a_i\}_{i=1}^k \subset A$, $2 \leqslant k \leqslant n + 1$, такие, что $M \overset{*}{-} \bigcup\limits_{i=1}^{k} \{a_i\} = \{0\}$.

2. Будет ли это утверждение верно в случае, когда выпуклый компакт не является строго выпуклым (например, многогранник)?

Задача 45. Привести пример невыпуклой функции f, удовлетворяющей условию

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y), \quad \forall x, y. \tag{1}$$

Показать, что если функция f непрерывна и выполнено условие (1), то она выпукла.

Задача 46. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция, $x(\cdot) : [a,b] \to \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Доказать неравенство

$$\int\limits_a^b f(x(t))\,dt \geqslant (b-a) f\left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b x(t)\,dt\right).$$

Указание. Проинтегрировать неравенство Фенхеля $f(x(t)) \geqslant \geqslant \langle y, x(t)\rangle - f^*(y)$.

Задача 47. Показать, что в пространстве $\mathbb{R}^3$ опорная функция всякой окружности $O_R(a,q) = \partial B_R(a) \bigcap H_q(a)$ радиуса $R > 0$ с центром в точке $a \in \mathbb{R}^3$, лежащая в гиперплоскости $H_q(a) = \{x \in \in \mathbb{R}^3 \mid \langle q,x\rangle = \langle q,a\rangle\}$, где $q \not\equiv 0$, для любого вектора $p \in \mathbb{R}^3$ вычисляется по формуле

$$s(p, O_R(a,q)) = R\|p \times q\| + \langle p,a\rangle,$$

где $p \times q$ означает векторное произведение векторов p и q.

Задача 48. Пусть непустое ограниченное множество A задано выражением

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leqslant 1\},$$

где функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является аналитической относительно переменных $(x_1, \ldots, x_n)$, причем в любой граничной точке x_0 множества A градиент $\nabla f(x_0) \neq 0$, а для любого направления $l \in \mathbb{R}^n$, $l \neq \neq 0$, справедливо неравенство

$$\frac{\partial^2 f}{\partial l^2}(x_0) > 0.$$

Доказать, что множество A является строго выпуклым множеством. Указание: показать, что в каждой граничной точке множества A существует опорная (касательная) гиперплоскость, и что множество $A \bigcap B_\varepsilon(x_0)$ содержится в опорном полупространстве. Далее воспользоваться задачей 49

Задача 49. Пусть линейно связный компакт $A \subset \mathbb{R}^n$ является локально выпуклым, т.е. $\forall x \in A\ \exists \varepsilon(x) > 0$ такое, что каждое множество $B_{\varepsilon(x)}(x) \bigcap A$ выпукло. Доказать, что множество A выпукло.
Указание: доказать, что без ограничения общности можно считать, что $0 \in A$ и в линейной оболочке множества A выполнены условия $\operatorname{int} A \neq \varnothing$ и $A = \overline{\operatorname{int} A}$. Далее воспользоваться следующим свойством выпуклых множеств: если C — выпуклое замкнутое ограниченное множество, для любых $x \in \operatorname{int} C$ и $y \in \partial B_1(0)$ определим луч $l_x = = \{x + \lambda y \mid \lambda \geqslant 0\}$ и точку $z = l_x \bigcap \partial C$, тогда $\{z + \lambda y \mid \lambda > 0\} \bigcap C = = \varnothing$.

Задача 50. Найти опорную функцию эллипсоидального тела вида
$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1\}.$$

Задача 51. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — открытое выпуклое множество. Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема на X. Доказать, что функция f выпукла тогда и только тогда, когда для любого $x_0 \in X$ квадратичная форма
$$k(p) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} p_i p_j$$
неотрицательна при всех $p \in \mathbb{R}^n$.

Задача 52. Доказать, что функция $f : l_2 \to \mathbb{R}$ вида $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\, x_n^2$ является собственной выпуклой функцией, причем она не ограничена в любой относительной окрестности любой точки из $\operatorname{dom} f$, и поэтому она разрывна в каждой точке из $\operatorname{dom} f$.

Задача 53. Доказать, что для того, чтобы выпуклые замкнутые множества A, B из гильбертова пространства $\mathcal{H}$ можно было отделить гиперплоскостью, необходимо и достаточно, чтобы $0 \notin \operatorname{int}(A + (-B))$.

Задача 54. Доказать, что для того, чтобы выпуклые замкнутые множества A, B из гильбертова пространства $\mathcal{H}$ можно было сильно отделить гиперплоскостью, необходимо и достаточно, чтобы $0 \notin \overline{A + (-B)}$.

Задача 55. Пусть в пространстве l_2 задано множество
$$A = \{x \in l_2 \mid |x_k| \leqslant 1/k, \forall k\}.$$
- "гильбертов кирпич". Доказать, что множество A является выпуклым компактным множеством и что через его граничную точку $0 \in A$ нельзя провести гиперплоскость, опорную ко множеству A. Доказать, что для любой точки $x \notin A$ справедливо неравенство $\|x\| > \inf\limits_{y \in A} \|x - y\|$.

Задача 56. Пусть непустое множество A из $\mathbb{R}^n$ задано в виде
$$A = \bigcap_{k=1}^{m} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle p_k, x \rangle \leqslant \alpha_k\},$$
где $\|p_k\| = 1$ для всех $k \in \overline{1,m}$. Доказать, что множество A есть многогранник (т.е. ограничено) тогда и только тогда, когда
$$0 \in \operatorname{int}\left(\operatorname{co} \bigcup_{k=1}^{m} \{p_k\}\right).$$

Задача 57. Доказать формулу
$$A \overset{*}{-} B = \bigcap_{p\in E^*} \{x \in E \mid \langle p,x\rangle \leqslant s(p,A) - s(p,B)\}.$$

Задача 58. Доказать формулу
$$s(p,A \overset{*}{-} B) = \overline{\mathrm{co}}(s(p,A) - s(p,B)).$$

Задача 59. Пусть A — выпуклый компакт из $\mathbb{R}^n$, причем $0 \in \in \mathrm{int}\, A$, пусть $\mu(x,A)$ — его функция Минковского и пусть $\mu'(x_0,A)(y)$ — ее производная в точке x_0 по направлению y. Доказать, что для любой точки $x_0 \in \partial A$ справедливо равенство
$$T_{\text{н}}(A,x_0) = \{y \mid \mu'(x_0,A)(y - x_0) \leqslant 0\}.$$

Задача 60. Показать, что для того, чтобы субдифференциал функции f в точке x был непустым множеством, необходимо, чтобы функция f была полунепрерывна снизу в точке x. Показать, что это условие не является достаточным.

Задачи письменного экзамена по курсу «Выпуклый анализ» 2004/2005 г.

1. ④ Доказать, что если одно из замкнутых множеств A и B из банахова пространства является компактом, то множество $A + B$ замкнуто.

2. ④ Найти опорную функцию $s(p,A)$ множества
$$A = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1+1)^2 + x_2^2 \leqslant 2, (x_1-1)^2 + x_2^2 \leqslant 2\}.$$

Указание. Записать вектор p в виде $p = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, где $\varphi \in \in [0,2\pi)$.

3. ④ Найти сопряженную функцию f^* для функции $f(x_1,x_2) = = 2x_1^2 + 5x_2^2$.

4. ④ Показать, что неравенство $s(p,A) \leqslant s(p,B)$ $\forall p \in E^*$ справедливо тогда и только тогда, когда справедливо включение $A \subset \mathrm{co}\, B$.

5. ④ Для множества $A = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \leqslant 2, x_2 - x_1 \leqslant \leqslant 2, x_2 \geqslant 0\}$ найти поляру.

6. ④ Пусть задана функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ так, что $f(x_1,x_2) = 2x_1^2 + + x_2^2$ на множестве $\{(x_1,x_2) \mid \max\{|x_1|,|x_2|\} \leqslant 1\}$, и $f(x_1,x_2) = +\infty$ в остальных точках (x_1,x_2). Найти субдифференциал $\partial f(1,-1)$ и обосновать.

1. ④ Пусть A, B, C, D — замкнутые множества из банахова пространства E. Пусть $h(\cdot,\cdot)$ — хаусдорфово расстояние между множествами. Доказать, что справедливо неравенство
$$h(A+B,C+D) \leqslant h(A,C) + h(B,D).$$

2. ④ Найти функцию Минковского множества
$$\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 5x_1^2 + 4x_2^2 \leqslant 1\}\,.$$

3. ④ Найти сопряженную функцию f^* для функции $f(x_1,x_2) = \max\{3|x_1|,2|x_2|\}$.

4. ④ Пусть множество A замкнуто и $x \in \operatorname{int}\operatorname{co} A$. Доказать неравенство $s(p,A) > \langle p,x\rangle\ \forall p \in E^*\backslash\{0\}$.

5. ④ Для множества $A = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 + x_2 \geqslant -1, x_2 - x_1 \leqslant 3, 5x_1 + x_2 \leqslant 10\}$ найти поляру.

6. ④ Пусть задана функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ так, что $f(x_1,x_2) = \max\{2|x_1|,|x_2|\}$ на множестве $\{(x_1,x_2) \,|\, (x_1-1)^2 + x_2^2 \leqslant 4\}$, и $f(x_1,x_2) = +\infty$ в остальных точках (x_1,x_2). Найти субдифференциал $\partial f(1,-2)$ и обосновать.

1. ④ Доказать, что если множество A из $\mathbb{R}^n$ является компактом, то и множество $\operatorname{co} A$ является компактом.

2. ④ Найти опорную функцию $s(p,A)$ множества $A = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1^2 + (x_2+1)^2 \leqslant 2, x_2 \geqslant 0\}$.

Указание. Записать вектор p в виде $p = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, где $\varphi \in [0,2\pi)$.

3. ④ Найти сопряженную функцию f^* для функции $f(x_1,x_2) = 3|x_1| + 4|x_2|$.

4. ④ Пусть множества A, D замкнуты, а множество B ограничено, выпукло и замкнуто. Доказать, что из включения $A + B \subset D + B$ следует включение $A \subset \operatorname{co} D$.

5. ④ Для множества $A = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 \geqslant 0, x_2 + 3x_1 \leqslant 3, x_2 \geqslant 0\}$ найти поляру.

6. ④ Пусть задана функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ так, что $f(x_1,x_2) = x_1^2 + 3x_2^2$ на множестве $\{(x_1,x_2) \,|\, \max\{2|x_1|,|x_2|\} \leqslant 2\}$, и $f(x_1,x_2) = +\infty$ в остальных точках (x_1,x_2). Найти субдифференциал $\partial f(-1,2)$ и обосновать.

1. ④ Пусть A — замкнутое множество из банахова пространства E, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Пусть $\|A\| = \sup\{\|a\| \mid a \in A\}$, $h(\cdot,\cdot)$ — хаусдорфово расстояние между множествами. Доказать, что справедливо неравенство $h(\alpha A,\beta A) \leqslant |\alpha - \beta|\|A\|$.

2. ④ Найти функцию Минковского множества
$$\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 3x_1^{3/2} + 4x_2^{3/2} \leqslant 5\}.$$

3. ④ Найти сопряженную функцию f^* для функции $f(x_1,x_2) = \sqrt{2x_1^2 + 3x_2^2}$.

4. ④ Пусть A — выпуклый компакт. Доказать, что опорная функция $s(\cdot,A)$ удовлетворяет условию Липшица с константой L. Каков смысл этой константы?

5. ④ Для множества $A = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 + x_2 \geqslant -2, x_1 \leqslant 1, x_2 \leqslant 3\}$ найти поляру.

6. ④ Пусть задана функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ так, что $f(x_1,x_2) = \max\{x_1 + 2x_2; x_1^2\}$ на множестве $\{(x_1,x_2) \mid (x_1+2)^2 + (x_2-1)^2 \leqslant 1\}$, и $f(x_1,x_2) = +\infty$ в остальных точках (x_1,x_2). Найти субдифференциал $\partial f(-1,1)$ и обосновать.