

Задачи
по курсу профессора Е.С.Половинкина
”Выпуклый анализ”.

Задача 1. Показать, что для произвольных замкнутых множеств A и B из банахова пространства E сумма (по Минковскому) этих множеств $A + B$ может оказаться не замкнутым множеством. Доказать, что если одно из этих множеств является компактом, то множество $A + B$ замкнуто. Доказать, что если оба множества A и B компактны, то сумма $A + B$ также компакт.

Задача 2. Пусть множество A из банахова пространства E выпукло и его внутренность $\text{int } A \neq \emptyset$. Доказать, что множество $\text{int } A$ выпукло и всюду плотно в \overline{A} .

Задача 3. Показать, что замкнутость множества A не гарантирует замкнутости множества $\text{co } A$ даже на плоскости \mathbb{R}^2 .

Задача 4. Пусть A, B, C, D — замкнутые множества из банахова пространства E_1 , $T : E_1 \rightarrow E_2$ — непрерывный линейный оператор, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Пусть $\|A\| = \sup\{\|a\| \mid a \in A\}$, $h(\cdot, \cdot)$ — хаусдорфово расстояние между множествами. Доказать, что справедливы неравенства

$$\begin{aligned} h(A + B, C + D) &\leq h(A, C) + h(B, D), & h(\alpha A, \alpha B) &\leq |\alpha| h(A, B), \\ h(\alpha A, \beta A) &\leq |\alpha - \beta| \|A\|, & h(TA, TB) &\leq \|T\| h(A, B), \\ h(\text{co } A, \text{co } B) &\leq h(A, B), & h(\overline{\text{co } A}, \overline{\text{co } B}) &\leq h(A, B). \end{aligned}$$

Задача 5. Показать, что имеет место включение

$$T_{\text{H}} \left(\bigcap_{k=1}^m A_k; 0 \right) \subset \bigcap_{k=1}^m T_{\text{H}}(A_k; 0),$$

и при этом оно может быть строгим.

Задача 6. Найти все (нижний, верхний, Кларка, асимптотический нижний и асимптотический верхний) касательные конусы в точке $0 \in \mathbb{R}^2$ для множества $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < |x|, x \in (-\infty, +\infty)\}$.

Задача 7. Доказать, что дифференцируемая функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство $f(x) - f(y) \geq \langle \nabla f(y), x - y \rangle$.

Задача 8. Найти опорную функцию: а) отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$, б) n -мерного куба с ребрами длины 2, параллельными осям координат и центром в нуле.

Задача 9. Найти функцию Минковского эллипсоидального тела вида

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}.$$

Задача 10. Доказать, что замкнутое множество A в банаховом пространстве E является выпуклым тогда и только тогда, когда функция $x \rightarrow \rho(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$ выпукла.

Задача 11. Привести пример выпуклой функции $f : B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}$, где $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$, которая в точке $(1; 0)$ не пн. сн. и не пн. св.

Задача 12. Доказать, что в \mathbb{R}^n всякая выпуклая функция f непрерывна на множестве $\text{int dom } f$.

Задача 13. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое выпуклое множество, $T = [0; 1]$. Функция $f : T \times U \rightarrow \mathbb{R}$ обладает свойствами: 1) $\forall t \in T$ функция $x \rightarrow f(t, x)$ выпукла и 2) $\forall x \in U$ функция $t \rightarrow f(t, x)$ непрерывна. Доказать, что f непрерывна по совокупности переменных на $T \times U$.

Задача 14. Доказать, что непустые множества A и B из банахова пространства E отделимы функционалом $p \in E^* \setminus \{0\}$ тогда

и только тогда, когда справедливо неравенство

$$s(p, A) + s(-p, B) \leq 0.$$

Задача 15. Пусть A — выпуклое замкнутое подмножество гильбертова пространства \mathcal{H} , $x, y \notin A$. Показать, что для проекций $P_A x$ и $P_A y$ точек x и y на A выполнено неравенство $\|P_A x - P_A y\| \leq \|x - y\|$.

Задача 16. Показать, что для функции $\varphi(t) = (1/\alpha)|t|^\alpha$ функция $\varphi^*(t) = (1/\beta)|t|^\beta$, где $(1/\alpha) + (1/\beta) = 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, является сопряженной.

Задача 17. Показать, что в гильбертовом пространстве равенство $f^* = f$ возможно лишь для функции $f(x) = \|x\|^2/2$.

Задача 18. Показать, что для выпуклой, собственной пн.сн. функции f справедливо равенство $\inf_{x \in E} f(x) = -f^*(0)$.

Задача 19. Найти сопряженную функцию f^* для функции

- 1) $f(x_1, x_2) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$;
- 2) $f(x_1, x_2) = |x_1| + |x_2|$;
- 3) $f(x_1, x_2) = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} + 1$.

Задача 20. Показать, что неравенство $s(p, A) \leq s(p, B) \forall p$ справедливо тогда и только тогда, когда справедливо включение $A \subset \overline{\text{co}} B$.

Задача 21. Показать, что $s\left(p, \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}\right) = \sup_{\alpha} s(p, A_{\alpha})$.

Задача 22. Множество A замкнуто и $x \in \text{int co } A$. Доказать, что $s(p, A) > \langle p, x \rangle \forall p \in E^* \setminus \{0\}$.

Задача 23. Множества A, D замкнуты, а множество B ограничено, выпукло и замкнуто. Доказать, что из включения $A + B \subset B + D$ следует включение $A \subset \overline{\text{co}} D$.

Задача 24. Доказать формулу

$$\overline{\text{co}} A = \bigcap_{p \in E^*} \{x \in E \mid \langle p, x \rangle \leq s(p, A)\}.$$

Задача 25. Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — липшицева функция с константой $L > 0$, а функция $\text{co } f$ — собственная. Доказать, что функция $\text{co } f$ также является липшицевой с той же константой L .

Задача 26. Доказать, что для любых функций $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ верно неравенство $\text{co } f + \text{co } g \leq \text{co}(f + g)$. Доказать, что если функция g является аффинной, т.е. $g(x) = \langle p, x \rangle + \alpha$, то указанное неравенство превращается в равенство.

Задача 27. Показать (построив соответствующие примеры), что для различных точек границы $\partial \text{dom } f$ эффективного множества функции f может оказаться, что $\partial f(x) \neq \emptyset$, так и $\partial f(x) = \emptyset$.

Задача 28. Найти субдифференциал функции $f(x_1, x_2) = |x_1| + |x_2| + 1$ при всех $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Задача 29. Найти субдифференциал функции $f(x_1, x_2) = \max\{|x_1| + |x_2|, 1.2 \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\}$ в точке $(0, 0)$.

Задача 30. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт. Как субдифференциал опорной функции $s(p, A)$ в произвольной точке $p \neq 0$ связан со множеством A ? В каком случае субдифференциал опорной функции является одноточечным множеством во всех точках границы множества?

Задача 31. (*) Привести пример невыпуклого множества A из банахова пространства, удовлетворяющего условию: для любых точек $x_1, x_2 \in A$ справедливо включение $\frac{x_1 + x_2}{2} \in A$. Показать, что если замкнутое множество A удовлетворяет приведенному выше условию, то оно является выпуклым.

Задача 32. (*) Пусть даны произвольные выпуклые множества $M, A, B \subset E$ и числа $\alpha > 0, \beta > 0$. Доказать, что справедливо

равенство

$$(((M + \alpha A) * \alpha B) + \beta A) * \beta B = (M + (\alpha + \beta)A) * (\alpha + \beta)B.$$

Задача 33. (*) Пусть в замкнутом и ограниченном множестве из \mathbb{R}^n существует по меньшей мере одна точка такая, что любая проходящая через нее прямая имеет с данным множеством единственный общий отрезок. Доказать, что все точки, обладающие этим свойством, образуют выпуклое тело.

Задача 34. (*) Пусть даны выпуклое ограниченное тело $A \subset \mathbb{R}^n$, вектор $q \in \mathbb{R}^n$, $q \neq 0$, и гиперплоскость $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle q, x \rangle = 0\}$. Каждая прямая $l_a = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = a + \lambda q\}$, где $a \in H$, пересекающая множество A , дает в пересечении отрезок (или точку) $[b_a, c_a] = l_a \cap A$, причем $b_a = a + \lambda_1 q$, $c_a = a + \lambda_2 q$ и $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Выбирая по всем таким прямым l_a вместо отрезка $[b_a, c_a]$ отрезок

$$\left[a + \frac{b_a - c_a}{2}, a + \frac{c_a - b_a}{2} \right],$$

получаем в совокупности множество \tilde{A} , симметричное относительно гиперплоскости H . Доказать, что множество \tilde{A} является выпуклым телом, и что диаметр множества \tilde{A} не превосходит диаметра множества A .

Задача 35. (*) Доказать равенство

$$T_H(A; a) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{\delta > 0} \bigcap_{0 < \lambda < \delta} \left(\frac{1}{\lambda}(A - a) + B_\varepsilon(0) \right).$$

Задача 36. (*) Доказать равенство

$$T_B(A; a) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{\delta > 0} \bigcup_{0 < \lambda < \delta} \left(\frac{1}{\lambda}(A - a) + B_\varepsilon(0) \right).$$

Задача 37. (*) Доказать равенство

$$T_C(A; a) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{\delta > 0} \bigcap_{0 < \lambda < \delta} \bigcap_{b \in A \cap B_\delta(a)} \left(\frac{1}{\lambda}(A - b) + B_\varepsilon(0) \right).$$

Задача 38. (*) Показать, что в пространстве \mathbb{R}^3 опорная функция всякой окружности $O_R(a, q) = \partial B_R(a) \cap H_q(a)$ радиуса $R > 0$ с центром в точке $a \in \mathbb{R}^3$, лежащая в гиперплоскости $H_q(a) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle q, x \rangle = \langle q, a \rangle\}$, где $q \neq 0$, для любого вектора $p \in \mathbb{R}^3$ вычисляется по формуле

$$s(p, O_R(a, q)) = R\|p \times q\| + \langle p, a \rangle,$$

где $p \times q$ означает векторное произведение векторов p и q .

Задача 39. (*) Найти опорную функцию эллипсоидального тела вида

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}.$$

Задача 40. (*) Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — открытое выпуклое множество. Пусть функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема на X . Доказать, что функция f выпукла тогда и только тогда, когда для любого $x_0 \in X$ квадратичная форма

$$k(p) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} p_i p_j$$

неотрицательна при всех $p \in \mathbb{R}^n$.

Задача 41. (*) Доказать, что функция $f : l_2 \rightarrow \mathbb{R}$ вида $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x_n^2$ является собственной выпуклой функцией, причем она не ограничена в любой относительной окрестности любой точки из $\text{dom } f$, и поэтому она разрывна в каждой точке из $\text{dom } f$.

Задача 42. (*) Доказать, что для того, чтобы выпуклые замкнутые множества A, B из гильбертова пространства \mathcal{H} можно было отделить гиперплоскостью, необходимо и достаточно, чтобы $0 \notin \text{int}(A + (-B))$.

Задача 43. (*) Доказать, что для того, чтобы выпуклые замкнутые множества A, B из гильбертова пространства \mathcal{H} можно было сильно отделить гиперплоскостью, необходимо и достаточно, чтобы $0 \notin \overline{A + (-B)}$.

Задача 44. (*) Пусть в пространстве l_2 задано множество

$$A = \{x \in l_2 \mid |x_k| \leq 1/k, \forall k\}.$$

- "гильбертов кирпич". Доказать, что множество A является выпуклым компактным множеством и что через его граничную точку $0 \in A$ нельзя провести гиперплоскость, опорную ко множеству A . Доказать, что для любой точки $x \notin A$ справедливо неравенство $\|x\| > \inf_{y \in A} \|x - y\|$.

Задача 45. (*) Пусть непустое множество A из \mathbb{R}^n задано в виде

$$A = \bigcap_{k=1}^m \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle p_k, x \rangle \leq \alpha_k\},$$

где $\|p_k\| = 1$ для всех $k \in \overline{1, m}$. Доказать, что множество A есть многогранник (т.е. ограничено) тогда и только тогда, когда

$$0 \in \text{int} \left(\text{co} \bigcup_{k=1}^m \{p_k\} \right).$$

Задача 46. (*) Доказать формулу

$$A \overset{*}{-} B = \bigcap_{p \in E^*} \{x \in E \mid \langle p, x \rangle \leq s(p, A) - s(p, B)\}.$$

Задача 47. (*) Доказать формулу

$$s(p, A \overset{*}{-} B) = \overline{\text{co}}(s(p, A) - s(p, B)).$$

Задача 48. (*) Пусть A — выпуклый компакт из \mathbb{R}^n , причем $0 \in \text{int} A$, пусть $\mu(x, A)$ — его функция Минковского и пусть $\mu'(x_0, A)(y)$ — ее производная в точке x_0 по направлению y . Доказать, что для любой точки $x_0 \in \partial A$ справедливо равенство

$$T_{\text{H}}(A, x_0) = \{y \mid \mu'(x_0, A)(y - x_0) \leq 0\}.$$

Задача 49. (*) Показать, что для того, чтобы субдифференциал функции f в точке x был непустым множеством, необходимо, чтобы функция f была полунепрерывна снизу в точке x . Показать, что это условие не является достаточным.